Über den Grad der Annäherung durch die Cesàroschen Mittel der Fourierreihe.

Von Georg Alexits in Budapest.

1. Die nach 2π periodische Funktion

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

sei im Intervalle $(0, 2\pi)$ in Lebesgueschem Sinne integrierbar. Die n-te Partialsumme des Cesàroschen Mittels δ-ter Ordnung ihrer Fourierreihe sei

$$s_n^{(\delta)}(x) = \frac{a_0}{2} +$$
$$+ \frac{1}{\binom{n+\delta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+\delta}{k} (a_{n-k} \cos (n-k)\, x + b_{n-k} \sin (n-k)\, x), \tag{2}$$

also ist $s_n^{(0)}(x)$ die n-te Partialsumme der Fourierreihe (1) und $s_n^{(1)}(x)$ ihr n-tes arithmetisches Mittel:

$$s_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n+1} (s_0^{(0)}(x) + s_1^{(0)}(x) + \ldots + s_n^{(0)}(x)).$$

Die arithmetischen Mittel betreffend zeigte Herr S. Bernstein[1]) die Richtigkeit der folgenden beiden Sätze:

Genügt die Funktion $f(x)$ einer Lipschitzbedingung α-ter Ordnung:

$$\left| \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta^\alpha} \right| < M$$

so folgt:

$$s_n^{(1)}(x) - f(x) = O\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

[1]) S. Bernstein: Mém. Acad. Belg. 4 (1912), p. 1–101.

wenn $\alpha = 1$ *ist und*

$$s_n^{(1)}(x) - f(x) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

wenn $\alpha < 1$, *jedoch* > 0 *ist.*

2. Diese beiden Sätze lassen zweierlei Fragen offen, welche aber nicht ohne Interesse zu sein scheinen. Die erste Frage bezieht sich auf nicht gleichmässige Approximationen. Die LIPSCHITZbedingung involviert nämlich die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ und der von Hrn. BERNSTEIN angegebene Annäherungsgrad ist tatsächlich gleichmässig erfüllt und zwar im Inneren eines jeden Stetigkeitsintervalles, in welchem die zugehörige LIPSCHITZbedingung erfüllt wird. Da aber die arithmetischen Mittel bei jeder Funktion mit Unstetigkeiten erster Art den Approximationsgrad $o(1)$ haben, denn es ist dann bekanntlich[2])

$$s_n^{(1)}(x) - f(x) = o(1)$$

in jedem Punkte x aus $(0, 2\pi)$, erhebt sich die Frage: wann lässt sich bei unstetigen Funktionen, also bei nicht gleichmässigen Annäherungen der Annäherungsgrad $o(1)$ verbessern?

Die zweite Frage entsteht aus dem Verhalten der CESÀROschen Mittel positiver Ordnung, da bei $\delta > 0$ die Gleichung

$$s_n^{(\delta)}(x) - f(x) = o(1)$$

in jedem Punkte, in welchem $f(x+0) + f(x-0)$ existiert, zutrifft[3]) bzw. in $(0, 2\pi)$ fast überall richtig ist.[4]) Mann könnte daher fragen: unter welchen Bedingungen wird ein von den arithmetischen Mitteln erreichter Annäherungsgrad $o(\mu)$ auch für ein CESÀROsches Mittel δ-ter Ordnung richtig?

3. Im Folgenden wird in dieser Hinsicht der weitgehende Satz bewiesen:

Wenn an einer Stelle x die Gleichung

$$\frac{1}{h}\int_0^h \frac{|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)|}{t^\alpha}\,dt < K$$

[2]) L. FEJÉR: C. R. Paris 131 (1900), p. 984–987.

[3]) M. RIESZ: C. R. Paris 149 (1909), p. 909–912. und S. CHAPMAN: London Math. Soc. Proc. 9 (1911), p. 369—409.

[4]) G. H. HARDY: London Math. Soc. Proc. 12 (1913), p. 365–372.

erfüllt ist, wobei K eine Konstante bezeichnet, so ist

$$s_n^{(\delta)}(x)-f(x)=O\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right) \tag{3}$$

für alle $\delta \geqq \alpha$.

Einem Spezialfalle dieses Satzes steht ein ihm gleichwertiger, in neuester Zeit von Hrn. Szász bewiesener Satz[5]) an der Seite. Ist nämlich $\delta=1$ und $\alpha=1$, so folgt nach (3):

$$s_n^{(1)}(x)-f(x)=O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Herr Szász zeigt aber an der betreffenden Stelle, dass

$$2\pi\frac{n}{\log n}\left(s_n^{(1)}(x)-f(x)\right)\to g(x),$$

wenn es im Punkte x Werte $f(x)$ und $g(x)$ derart gibt, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{\sin t}-g(x)\right|dt=0$$

erfüllt wird. Man sieht die Äquivalenz beider Behauptungen unschwer ein.

4. Vor Allem sollen einige Formeln für die Rechnung mit $s_n^{(\delta)}(x)$ zusammengestellt werden. Aus der Definitionsgleichung

$$\binom{k+\delta}{k}=\frac{(1+\delta)(2+\delta)\ldots(k+\delta)}{k!}$$

ergibt sich nach einer kurzen Rechnung die folgende bekannte Formel:

$$\binom{k+\delta}{k}=\binom{k-1+\delta}{k}+\binom{k-1+\delta}{k-1},$$

woraus dann durch wiederholte Anwendung

$$\binom{n+\delta}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k-1+\delta}{k} \tag{4}$$

folgt. Mit Hilfe dieser Gleichung (4) erhält man sofort:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+\delta}{k}u_{n-k}=\binom{\delta}{0}u_n+\left[\binom{\delta}{0}+\binom{\delta}{1}\right]u_{n-1}+\ldots+u_1\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}=$$
$$=\binom{\delta}{0}\sum_{k=0}^{n-1}u_{n-k}+\binom{\delta}{1}\sum_{k=1}^{n-1}u_{n-k}+\binom{1+\delta}{2}\sum_{k=2}^{n-1}u_{n-k}+\ldots+\binom{n-2+\delta}{n}u_1.$$

[5]) O. Szász: Math. és Phys. Lapok 32 (1925), p. 18–24. (ungarisch); p. 24–25 (deutsch).

Setzt man hier $u_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, so folgt aus (2) nach einer einfachen Überlegung:

(5) $$s_n^{(\delta)}(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\binom{n+\delta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k-1+\delta}{k} s_{n-k}^{(0)}(x).$$

Die Darstellung (5) ergibt in der bekannten DIRICHLETschen Weise:

(6) $$s_n^{(\delta)}(x) - f(x) = \frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) K_n(t)\, dt,$$

wobei

$$\varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)$$

und

(7) $$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k-1+\delta}{k} \frac{\sin[2(n-k)+1]t}{\sin t}.$$

bezeichnet. Herr M. RIESZ zeigte[6]) die Richtigkeit von

(8) $$\frac{|K_n(t)|}{\binom{n+\delta}{n}} < \frac{C}{n^\delta t^{1+\delta}},$$

wobei C eine Konstante ist und t im Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ variiert.

5. Um die Behauptung des Anfangs ausgesprochenen Satzes zu beweisen, wollen wir das in (6) auftretende Integral in drei Teile zerfallen lassen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2n+1}} + \int_{\frac{1}{2n+1}}^{h} + \int_h^{\frac{\pi}{2}}.$$

Nehmen wir nun an, dass im Punkte x die Bedingung

(9) $$\frac{1}{h}\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{h}\Phi(h) < K$$

erfüllt ist, wobei K eine Konstante und h klein genug ist, ausserdem α eine Zahl >0 und $\leqq 1$ bedeutet. Wenn wir noch beachten, dass im Intervalle $\left(0, \frac{1}{2n+1}\right)$ die Ungleichung $\frac{1}{\sin t} \leqq \frac{1+\nu(n)}{t}$ besteht, wobei $\nu(n)$ mit $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert, so folgt nach

---

[6]) M. RIESZ: Acta Litt. ac. Sc. Univ. Hung. Fr. J. 1 (1923), p. 104—113.

der Darstellung (7) des Kernes $K_n(t)$:

$$\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}|\varphi(t)|\,|K_n(t)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}|\varphi(t)|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}\frac{\sin[2(n-k)+1]t}{\sin t}\right|dt\leqq$$

$$\leqq\frac{1+\nu(n)}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}|\varphi(t)|\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}\frac{|\sin[2(n-k)+1]t|}{t}\,dt\leqq$$

$$\leqq\frac{1+\nu(n)}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}\frac{|\varphi(t)|}{t^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}\left(\frac{|\sin[2(n-k)+1]t|}{t}\right)^{1-\alpha}dt\leqq$$

$$\leqq\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}[2(n-k)+1]^{1-\alpha}[1+\nu(n)]}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}\frac{|\varphi(t)|}{t^\alpha}\,dt<$$

$$<\frac{[1+\nu(n)]\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k-1+\delta}{k}}{\binom{n+\delta}{n}\pi}(2n+1)^{1-\alpha}\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\right).$$

Aus (4) und (9) folgt daher:

$$\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}|\varphi(t)|\,|K_n(t)|\,dt<$$

$$(10)\qquad <\frac{[1+\nu(n)]\,n}{\pi(n+\delta)(2n+1)^\alpha}(2n+1)\,\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\right)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Auf das Integral $\int_{\frac{1}{2n+1}}^{b}$ wenden wir Ungleichung (8) an und integrieren dann partiell:

$$\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi}\int_{\frac{1}{2n+1}}^{b}|\varphi(t)|\,|K_n(t)|\,dt<\frac{C}{\pi n^\delta}\int_{\frac{1}{2n+1}}^{b}\frac{|\varphi(t)|}{t^{1+\delta}}\,dt\leqq$$

$$\leqq \frac{C(2n+1)^{\delta-\alpha}}{\pi n^{\delta}} \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} \frac{|\varphi(t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{C(2n+1)^{\delta-\alpha}}{\pi n^{\delta}} \left[\frac{\Phi(h)}{h} - (2n+1)\,\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\right) + \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} \frac{\Phi(t)}{t^2}\, dt \right] =$$

$$= \frac{C(2n+1)^{\delta-\alpha}}{\pi n^{\delta}} \left[\frac{\Phi(h)}{h} - (2n+1)\,\Phi\left(\frac{1}{2n+1}\right) + \frac{\Phi(\tau)}{\tau} \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} \frac{dt}{t} \right].$$

Infolge (9) erhalten wir demnach:

$$\frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi} \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} |\varphi(t)|\,|K_n(t)|\, dt <$$

$$(11) \qquad < \frac{K}{(2n+1)^{\alpha}} \cdot \frac{C(2n+1)^{\delta}}{\pi n^{\delta}} \left(2 + \int\limits_{\frac{1}{2n+1}}^{h} \frac{dt}{t} \right) =$$

$$= \frac{K}{(2n+1)^{\alpha}} \cdot \frac{C(2n+1)^{\delta}}{\pi n^{\delta}} \left(2 + \log (2n+1)\, h\right) = O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right).$$

Das Integral $\int\limits_{h}^{\frac{\pi}{2}}$ bedeutet natürlich keinen Beitrag. Dies ist zu sehen bei Beachtung von $\delta \geqq \alpha$ und (8), wonach

$$(12) \quad \frac{1}{\binom{n+\delta}{n}\pi} \int\limits_{h}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t)|\,|K_n(t)|\, dt < \frac{C}{\pi n^{\delta}} \int\limits_{h}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\varphi(t)|}{t^{1+\delta}}\, dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Die Relationen (6), (10), (11) und (12) ergeben zusammen:

$$s_n^{(\delta)}(x) - f(x) = O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right),$$

was aber die Behauptung war.

Budapest, 20. März 1926.

(*Eingegangen am 23. März 1926.*)